Perfectoid field の tilt と untilt [*]

Yuki @*monea_math*

2021 年 12 月 17 日

概 要

P. Scholz により導入された Perfectoid field の概念のうち初歩的な tilt と untilt について解説する.

目 次

1 Perfectoid fields と tilting

本稿では p を素数とし固定する.

定義 1.1. C : 剰余標数 p の完備非アルキメデス付値体. C が perfectoid field であるとは次の条件を満たすことである.

(1) C 上の付値は離散的ではない

(2) $\mathcal{O}_C/(p)$ 上の p 乗写像は全射

注意 1.2. 非アルキメデス付値体というときには付値は自明ではないものとする. 一方単に付値体と言ったときには自明な付値であることも許容する.

補題 1.3. C : 剰余標数 p の完備非アルキメデス付値体.
C 上の p 乗写像は全射ならば C は perfectoid field である.

[*] 本稿は Math Advent Calender 2021 (https://adventar.org/calendars/6146) の 17 日目の記事です.

証明. v を C 上の付値とする．v が離散的だとし，$x \in C$ を付値が正なもので最小のものとする．C 上で p 乗写像は全射なので $x = y^p$ なる $y \in C$ が存在する．

$$0 < v(y) = v(x)/p < v(x)$$

なので $v(x)$ の最小性に矛盾する．

次に $\mathcal{O}_C/(p)$ 上の p 乗写像が全射であることを示す．このためには $\mathcal{O}_C$ 上の p 乗写像が全射であることを示せば十分である．$z \in \mathcal{O}_C$ に対し仮定から $z = w^p$ なる $w \in C$ が存在するので

$$v(w) = v(z)/p \geq 0$$

よって $w \in \mathcal{O}_C$. □

例 1.4. $\mathbb{C}_p$ を p 進複素数体とすると，これは補題 1.3 により perfectoid field である．

命題 1.5. 標数 p の非アルキメデス付値体が perfectoid であるのは，それが完備かつ perfect であるときに限る．

証明. 補題 1.3 と定義から直ちに従う． □

以下，C は標数 p の perfectoid field とする．

定義 1.6. C の tilt を

$$C^\flat := \varprojlim_{x \mapsto x^p} C$$

で定義する．$C^\flat$ 上には (射影極限に誘導される) 自然な積構造が入る．

定義から直ちに分かるように C の tilt は乗法的な monoid である．これからの目標は C の tilt が標数 p の perfectoid field であることを示すことである．任意の $c = (c_n)_{n \geq 0} \in C^\flat$ に対し $c^\sharp := c_0$ とおく．

補題 1.7. $\omega \in C^\times$, $0 < v(\omega) \leq v(p)$ とする．
このとき任意の $x, y \in \mathcal{O}_C$, $x - y \in \omega\mathcal{O}_C$ に対して

$$x^{p^n} - y^{p^n} \in \omega^{n+1}\mathcal{O}_C \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

証明. $v(\omega) \leq v(p)$ より $p \in \omega\mathcal{O}_C$. このとき $n \geq 1$ に対し

$$x^{p^n} - y^{p^n} = \left(y^{p^{n-1}} + \left(x^{p^{n-1}} - y^{p^{n-1}}\right)\right)^p - y^{p^n}$$

$x - y \in \omega\mathcal{O}_C$ なので帰納的に主張を得る． □

命題 1.8. $\omega \in C^\times$, $0 < v(\omega) \le v(p)$ とする．
このとき自然な射影 $\mathcal{O}_C \mapsto \mathcal{O}_C/(\omega)$ は乗法的な全単射

$$\varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_C \cong \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_C/(\omega)$$

を誘導する．

証明. 逆写像

$$\ell : \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_C/(\omega) \to \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_C$$

を構成する．任意の $\bar{c} = (\bar{c}_n) \in \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_C/(\omega)$ をとる．各 $n \ge 0$ に対し $\bar{c}_n$ の持ち上げ $c_n \in \mathcal{O}_C$ をとる．このとき

$$c_{n+m+\ell}^{p^\ell} - c_{n+m} \in \omega\mathcal{O}_C \quad (\ell, m, n \ge 0)$$

が成り立つ．これと補題 1.7 より

$$c_{n+m+\ell}^{p^{m+\ell}} - c_{n+m}^{p^m} \in \omega^{m+1}\mathcal{O}_C \quad (n, m \ge 0)$$

よって各 $n \ge 0$ に対して $\{c_{n+m^{p^m}}\}_{m\ge 0}$ は $\mathcal{O}_C$ 内に極限を持つ．さらにこの極限は持ち上げ c_n の取り方によらないことが補題 1.7 より分かる．いま

$$\ell_n(\bar{c}) := \lim_{m\to\infty} c_{n+m}^{p^m} \quad (n \ge 0)$$

と定義し，$\ell(\bar{c}) := (\ell_n(\bar{c})) \in \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_C$ と定義すれば構成から ℓ が求めていた逆写像であることが分かる． □

命題 1.9. C の tilt $C^\flat$ は標数 p の完備付値体の構造を持ち，付値 $v^\flat$ は $v^\flat(c) := c^\sharp$ $(c \in C^\flat)$ で与えられる．さらに $C^\flat$ の付値環は

$$\mathcal{O}_{C^\flat} = \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_C$$

で与えられる．

証明. $\omega \in C^\times$, $0 < v(\omega) \le v(p)$ をとると $p \in \omega\mathcal{O}_C$ なので $\mathcal{O}_C/(\omega)$ は標数 p の環である．よって $\mathcal{O}_C/(\omega)$ 上の環構造は射影極限 $\varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_C/(\omega)$ 上の自然な環構造を誘導し，乗法的な全単射を通して

$$\mathcal{O} := \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O} \cong \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_C/(\omega) \tag{1.1}$$

上の環構造を誘導する．さらに $\mathcal{O}$ 上の環構造は ω の取り方によらない．実際，命題 1.8 の証明より $a = (a_n)$, $b = (b_n) \in \mathcal{O}$ に対しその和は

$$(a+b)_n = \lim_{m\to\infty} (a_{m+n} + b_{m+n})^{p^m}$$

で与えられる．このとき $C^\flat$ は $\mathcal{O}$ の商体となる．構成から明らかに $C^\flat$ は標数 p の perfect field である．

次に $C^\flat$ は $v^\flat(c) = v(c^\sharp)$ で与えられる付値 $v^\flat$ を持つことを示す．構成より $v^\flat$ は乗法的な準同型である．超三角不等式を示すために $a = (a_n)$, $b = (b_n) \in C^\flat$ をとる．$v^\flat(a) \geq v^\flat(b)$ とすると $v(a_0) \geq v(b_0)$ であり $n \geq 0$ に対して

$$v(a_n) = \frac{1}{p^n}v(a_0) \geq \frac{1}{p^n}v(b_0) = v(b_n)$$

が成り立つので $a_n/b_n \in \mathcal{O}_C$．したがって，ある $r \in \mathcal{O}_C$ が存在して $a = br$ となり

$$v^\flat(a+b) = v^\flat((r+1)b) = v^\flat(r+1) + v^\flat(b) \geq v^\flat(b) = \min(v^\flat(a), v^\flat(b))$$

となる．

いま $c = (c_n) \in C^\flat$ をとる．このとき

$$v(c_n) = \frac{1}{p^n}v(c_0) = \frac{1}{p^n}v^\flat(c) \quad (n \geq 0) \tag{1.2}$$

よって $\mathcal{O}$ は $C^\flat$ の付値環となる．$N > 0$ を固定したとき不等式 (1.2) より $n \leq N$ に対して $v(c_n) \geq v(\omega)$ であるのは $v^\flat(c) \geq p^N v(\omega)$ であるときに限る．したがって全単射 (1.1) は同相写像になる．ここで $\mathcal{O} = \mathcal{O}_C$ には $v^\flat$ から誘導される位相，$\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C/(\omega)$ には離散位相の射影極限位相を入れる．後者の位相は完備なので $C^\flat$ も完備である． □

注意 1.10. C が perfectoid ではなく完備非アルキメデス付値体でも上の証明は成立する．しかし perfectoid でないときには自明な付値となる場合がある．例えば $C = \mathbb{Q}_p$ のときは $C^\flat = \mathbb{F}_p$ となり自明な付値となる．

命題 1.11. 写像 $\mathcal{O}_{C^\flat} \to \mathcal{O}_C/(p); c \to c^\sharp$ は環準同型である．

証明. 命題 1.9 の証明で与えた $\mathcal{O}_{C^\flat}$ の環構造の定義から従う． □

補題 1.12. 任意の $y \in \mathcal{O}_C$ に対し $y - z^\sharp \in p\mathcal{O}_C$ なる $z \in \mathcal{O}_{C^\flat}$ が存在する．

証明. $\overline{y}$ を y の $\mathcal{O}_C/(p)$ における像とする．$\mathcal{O}_C/(p)$ 上の p 乗写像は全射なので $z'_o = \overline{y}$ なる $z' = (z'_n) \in \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C/(p)$ が存在する．いま $z \in \mathcal{O}_{C^\flat}$ を z' の全単射

$$\mathcal{O}_{C^\flat} \cong \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C/(p)$$

の元での像とすれば，これが目的のものである． □

命題 1.13. 付値体 C と $C^\flat$ は同じ付値群を持つ．

証明. $v^\flat$ の構成から $v^\flat\left((C^\flat)^\times\right) \subset v(C^\times)$ なので逆の包含を示す．$y \in C^\times$ をとる．v は離散的ではないので $0 < v(\omega) < v(p)$ なる $\omega \in \mathcal{O}_C$ が存在する．$y = \omega^n u$ $(n \in \mathbb{Z},\ u \in \mathcal{O}_C,\ v(u) < v(\omega))$ と書く．補題 1.12 より $\omega - (\omega^\flat)^\sharp \in p\mathcal{O}_C$ かつ $u - (u^\flat)^\sharp \in p\mathcal{O}_C$ なる $\omega^\flat, u^\flat \in \mathcal{O}_{C^\flat}$ が存在する．このとき

$$v^\flat(\omega^\flat) = v((\omega^\flat)^\sharp) = v\left((\omega) - (\omega - (\omega^\flat)^\sharp)\right) = v(\omega)$$
$$v^\flat(u^\flat) = v((u^\flat)^\sharp) = v\left((u) - (u - (u^\flat)^\sharp)\right) = v(u)$$

よって $z = (\omega^\flat)^n u^\flat$ とおけば $v^\flat(z) = v(y)$. □

系 1.14. $C^\flat$ は標数 p の perfectoid field.

証明. 命題 1.13 より $C^\flat$ の付値群は自明ではない．構成から $C^\flat$ は perfect なので主張は命題 1.5 と命題 1.9 より従う． □

系 1.15. C が標数 p なら自然な同型 $C^\flat \cong C$ が存在する．

証明. 命題 1.5 より C は perfect なので主張は構成から直ちに従う． □

例 1.16. $\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})}$ は perfectoid field であり tilt は $\mathbb{F}_p((u^{1/p^\infty}))$ の u-進完備化である．

2 Untilt

この節では F は標数 p の代数閉な perfectoid field とし付値を v_F，付値環 $\mathcal{O}_F$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_F$ とする．また $A_{\inf} := W(\mathcal{O}_F)$ を $\mathcal{O}_F$ 上の Witt ベクトルの環とし $W(F)$ を F 上の Witt ベクトルの環とする．さらに $c \in F$ に対し $[c]$ を $W(F)$ における Teichmuler lift とする．

定義 2.1. F の untilt とは組 (C, η) のことである．ここで C は perfectoid field で $\eta : F \cong C^\flat$ は連続同型である．

例 2.2. F と自然な同型 $F \cong F^\flat$ の組は F の untilt であり，これを F の自明な untilt という．

定義 2.3. $C : F$ の untilt with $\eta : F \cong C^\flat$.

(1) C に付随するシャープ写像を合成写像

$$\sharp : F \xrightarrow[\eta]{\sim} C^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} C \to C$$

で定義する．ここで 2 番目の写像は第 0 成分への射影である．

(2) $c \in F$ に対して $\sharp$ による c の像を $c^{\sharp_C}$ あるいは $c^\sharp$ で表す．

(3) C 上の正規化された付値 v_C を $v_F(c) = v_C(c^\sharp),\ (c \in F)$ で与えられるものとする．

これからの目標は F の untilt は代数閉体であることを示すことである．

補題 2.4. L :完備な非アルキメデス付値体，$f(x)$: L 上の monic 多項式, $f(0) \in \mathcal{O}_L$. このとき $f(x)$ は $\mathcal{O}_L$ 上の多項式である．

証明. v_L を L 上の付値とする．L' を L 上の有限次 Galois 拡大で $f(x)$ が

$$f(x) = \prod_{i=1}^{d}(x - r_i), \quad r_i \in L'$$

と分解できるようなものとする．付値 v_L は $Gal(L'/L)$-不変な L' 上の付値 $v_{L'}$ に一意に延長できる．特に根 r_i は同じ $Gal(L'/L)$-軌道に属するので全て同じ付値である．$f(0) = (-1)^d r_1 \cdots r_d \in \mathcal{O}_L$ なので r_i の付値は全て非負である．よって $f(x)$ の係数の付値も非負である． □

命題 2.5. $C : F$ の untilt, $f(x) : C$ 上の規約な d 次 monic 多項式任意の $y \in C$ に対して $z \in C$ が存在し

$$v_C(y - z) \geq v_C(f(y))/d, \quad v_C(f(z)) \geq v_C(p) + v_C(f(y))$$

証明. $f(x)$ を $f(x + y)$ に置き換えることで $y = 0$ と仮定して良い．このとき示すべき主張は

$$v_C(z) \geq v_C(f(0))/d, \quad v_C(f(z)) \geq v_C(p) + v_C(f(0)) \tag{2.1}$$

なる $z \in C$ が存在すること，である．もし $f(0) = 0$ ならば $z = 0$ とすれば良い．よって $f(0) \neq 0$ とする．F は代数閉体なので F の付値群上で d 倍写像は全射である．よって命題 1.13 より C の付値群上の d 倍写像も全射である．特に $dv_C(a) = v_C(f(0))$ なる $a \in C$ が存在する．このとき (2.1) は

$$v_C(z/a) \geq 0, \quad v_C\left(f(a \cdot (z/a))/a^d\right) \geq v_C(p)$$

と書ける．したがって $f(x)$ を monic 多項式 $f(a \cdot x)/a^d$ に置き換えて $v_C(f(0)) = 0$ と仮定してよい．このとき示すべき主張は $f(z) \in p\mathcal{O}_C$ なる $z \in \mathcal{O}_C$ が存在すること，である．

補題 2.4 より $f(x)$ は $\mathcal{O}_C$ 上の多項式である．すなわち $f(x) = x^d + a_1 x^{d-1} + \cdots + a_d\ (a_i \in \mathcal{O}_C)$. このとき補題 1.12 より $a_i - c_i^\sharp \in p\mathcal{O}_C$ なる $c_i \in \mathcal{O}_F$ が存在する．F は代数閉体なので $\mathcal{O}_F$ 上の多項式 $g(x) = x^d + c_1 x^{d-1} + \cdots + c_d$ は $\mathcal{O}_F$ 内に根 α を持つ．

$$\begin{aligned} f(\alpha^\sharp) &= (\alpha^\sharp)^d + a_1(\alpha^\sharp)^{d-1} + \cdots + a_d \\ &= (\alpha^\sharp)^d + c_1^\sharp(\alpha^\sharp)^{d-1} + \cdots + c_d^\sharp \quad mod\ p\mathcal{O}_C \\ &= (\alpha^d + c_1\alpha^{d-1} + \cdots c_d)^\sharp \quad mod\ p\mathcal{O}_C \\ &= g(\alpha)^\sharp = 0 \end{aligned}$$

ここで3つ目の等式は命題1.11．よって $z=\alpha^\sharp$ とすればよい．

□

命題 2.6. F の untilt は代数閉体.

証明. C を F の untilt とし，$f(x)$ を C 上の既約 d 次 monic 多項式とする．$f(x)$ が C 内に根を持つことを示す．$f(x)$ を十分大きい n に対して $p^{nd}f(x/p^n)$ で置き換えることにより $f(x)$ は $\mathcal{O}_C$ 上の多項式としてよい．$y_0 := 0$ とすると $v_C(f(y_0)) = v_C(f(0)) \geq 0$. ゆえ命題2.5より帰納的に次のような C 内の列 $\{y_n\}$ を構成できる:

$$v_C(y_{n-1}-y_n) \geq (n-1)v_C(p)/d, \quad v_C(f(y_n)) \geq nv_C(p) \quad (n \geq 1)$$

このとき列 $\{y_n\}$ は構成よりコーシー列なので $y \in C$ に収束する．よって

$$f(y) = f(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0$$

となり $f(x)$ の根 $y \in C$ を得る． □

系 2.7. F の untilt C に対して $\sharp : F \longrightarrow C$ は全射.

次の目標は F の untilt を A_{inf} の単項イデアルでパラメタライズすることである.

定義 2.8. C_1, $C_2 : F$ の tilt with $\eta_1 : F \simeq C_1^\flat$, $\eta_2 : F \simeq C_2^\flat$. C_1 と C_2 が同値であるとは同型 $C_1^\flat \simeq C_2^\flat$ を誘導する連続同型 $C_1 \simeq C_2$ が存在して次の図式を可換にすることである.

$$\begin{tikzcd} C_1^\flat \arrow[rr, "\sim"] & & C_2^\flat \\ & F \arrow[ul, "\eta_1"] \arrow[ur, "\eta_2"'] & \end{tikzcd}$$

命題 2.9. C : perfectoid field.

(1) 任意の連続同型 $F \simeq C^\flat$ に対して $\omega \in \mathfrak{m}_F$ が存在し $\mathcal{O}_F/(\omega) \simeq \mathcal{O}_C/(p)$ を誘導する.

(2) 任意の連続同型 $\mathcal{O}_F/(\omega) \simeq \mathcal{O}_C/(p)$ $(\omega \in \mathfrak{m}_F)$ は一意に連続同型 $F \simeq C^\flat$ に持ち上がる.

証明. (1). C を与えられた連続同型 $F \simeq C^\flat$ により F の untilt とみなす．このとき命題1.13より $v_F(\omega) = v_C(p) > 0$ なる $\omega \in F$ が存在する．さらに連続同型 $F \simeq C^\flat$ は付値環の同型 $\mathcal{O}_F \simeq \mathcal{O}_{C^\flat}$ に制限される．いま写像

$$\mathcal{O}_F \xrightarrow{c \mapsto c^\sharp} \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{O}_C/(p)$$

ここで2つ目の写像は自然な射影である．この写像は命題1.11でみたように環準同型であり，命題1.12でみたように全射である．さらにその核は $v_C(c^\sharp) \geq v_C(p)$ なる $c \in \mathcal{O}_F$ で尽くされる．よって同型 $\mathcal{O}_F/(\omega) \simeq \mathcal{O}_C/(p)$ を誘導する．

(2)．F はその tilt と同型なので $\mathcal{O}_F \simeq \mathcal{O}_{F^\flat} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_F$．よって任意の同型 $\mathcal{O}_F/(\omega) \simeq \mathcal{O}_C/(p)$ $(\omega \in \mathfrak{m}_F)$ は一意に同型

$$\mathcal{O}_F \simeq \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_F/(\omega) \simeq \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C/(p) \simeq \mathcal{O}_{C^\flat}$$

に持ち上がる．ここで1つ目と3つ目の同型は命題1.8で与えられたものである．よって連続同型 $F \simeq C^\flat$ に持ち上がる．

□

定義 2.10. $\xi \in A_{\mathrm{inf}}$ が (次数1の)primitive な元であるとは $\omega \in \mathfrak{m}_F$, $u \in A_{\mathrm{inf}}^\times$ が存在し $\xi = [\omega] - up$ となることである．A_{inf} の primitive な元が p で割れないとき非退化であるという．

命題 2.11. $\xi \in A_{\mathrm{inf}}$, $\xi = \sum_{n=0}^\infty [c_n] p^n$.

(1) ξ が primitive であるのは $v_F(c_0) > 0$, $v_F(c_1) = 0$ であるときに限る．

(2) ξ が primitive ならば ξ の単元倍は primitive.

証明. (1)．Teichmuler 展開 $\xi = [c_0] + p\sum_{n=0}^\infty [c_{n+1}^{1/p}] p^n$ から従う．
(2)．A_{inf} (Witt 環) の積の計算から従う． □

命題 2.12. $\xi \in A_{\mathrm{inf}}$: 非退化な primitive 元．このとき剰余環 $A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ は p-ねじれ自由かつ p 進完備.

証明. まず $A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ が p-ねじれ自由であることを示す．$pa \in \xi A_{\mathrm{inf}}$ なる $a \in A_{\mathrm{inf}}$ を考える．$pa = \xi b$ $(b \in A_{\mathrm{inf}})$ と書くと ξ は非退化より ξ の $A_{\mathrm{inf}}/(\xi) \simeq \mathcal{O}_F$ における像は0ではないので $b \in pA_{\mathrm{inf}}$ である．したがって $b = pb'$ なる $b' \in A_{\mathrm{inf}}$ が存在し，$pa = p\xi b'$ となる．よって A_{inf} は整域なので $a = \xi b'$ を得る．ゆえ $A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ は p-ねじれ自由である．

次に $A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ は p 進完備であることを示す．$\widehat{A_{\mathrm{inf}}/(\xi)}$ を $A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ の p 進完備化とする．Witt 環の一般論より A_{inf} は p 進完備なので射影 $A_{\mathrm{inf}} \to A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ は全射な環準同型

$$A_{inf} \to \widehat{A_{inf}/(\xi)} \tag{2.2}$$

を誘導する (cf. [3], Tag0315)．したがってこの全射の核が ξA_{inf} であることを示せばよい．同一視

$$\widehat{A_{\mathrm{inf}}/(\xi)} = \varprojlim_n (A_{\mathrm{inf}}/(\xi))/((p^n,\xi)/(\xi)) \simeq \varprojlim_n A_{\mathrm{inf}}/(p^n,\xi)$$

写像 (2.2) は自然な写像

$$A_{\mathrm{inf}} \to \varprojlim_n A_{\mathrm{inf}}/(p^n, \xi)$$

に一致する．この写像の核は $\cap_{n=1}^{\infty}(p^n A_{\mathrm{inf}} + \xi A_{\mathrm{inf}})$ であり，明らかに ξA_{inf} を含む．よって逆の包含 $\cap_{n=1}^{\infty}(p^n A_{\mathrm{inf}} + \xi A_{\mathrm{inf}}) \subset \xi A_{\mathrm{inf}}$ を示せばよい．$u \in \cap_{n=1}^{\infty}(p^n A_{\mathrm{inf}} + \xi A_{\mathrm{inf}})$ をとる．各 $n \geq 1$ に対し $u = p^n + a_n + \xi b_n$ なる A_{inf} の元 $a_n,\ b_n$ をとると $p^n(a_n - pa_{n+1}) = \xi(b_{n+1} - b_n)$. ξ は $A_{\mathrm{inf}}/(\xi) \simeq \mathcal{O}_F$ における像が 0 ではないので $b_{n+1} - b_n$ は p^n で割れる．よって A_{inf} の p 進完備性から列 $\{b_n\}$ は A_{inf} の元 b に収束する．したがって

$$u = \lim_{n\to\infty}(p^n a_n + \xi b_n) = \lim_{n\to\infty} p^n a_n + \xi \lim_{n\to\infty} b_n = \xi b$$

となるので $u \in \xi A_{\mathrm{inf}}$ を得る．

□

定義 2.13. primitive な元 $\xi \in A_{\mathrm{inf}}$ に対し自然な射影 $\theta_\xi : A_{\mathrm{inf}} \to A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ を ξ に付随する untilt 写像という．

補題 2.14. $\xi \in A_{\mathrm{inf}}$: 非退化な primitive 元.

(1) 0 ではない $c \in \mathcal{O}_F$ に対して p の適当なべきは $A_{inf}/(\xi)$ において $\theta_\xi([c])$ で割り切れる．

(2) 任意の $m \in \mathfrak{m}_F$ に対して $\theta_{xi}([m])$ の適当なべきは $A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ において p で割り切れる．

証明. $\xi = [\omega] - pu\ (\omega \in m_F,\ u \in A_{\mathrm{inf}}^{\times})$ と書く．
$0 \neq c \in \mathcal{O}_F$ に対し $\omega^i = cc'\ (i > 0,\ c' \in \mathcal{O}_F)$ と書くと

$$p^i = (\theta_\xi(u^{-1})\theta_\xi(up))^i = \theta_\xi(u)^{-i}\theta_\xi([\omega])^i = \theta_\xi(u)^{-i}\theta_\xi([c])\theta_\xi([c']).$$

同様に $m \in \mathfrak{m}_F$に対し $m^j = \omega \cdot b\ (j > 0,\ b \in \mathcal{O}_F)$ と書くと

$$\theta_\xi([m])^j = \theta_\xi([\omega])\theta_\xi([b]) = \theta_\xi(pu)\theta_\xi([b]) = p\theta_\xi(u)\theta_\xi([b]).$$

□

命題 2.15. $\xi \in A_{\mathrm{inf}}$: 非退化な primitive 元．$c,\ c' \in \mathcal{O}_F$. このとき $\mathcal{O}_F$ において c が c' を割り切るのは $A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ において $\theta_\xi([c])$ が $\theta_\xi([c'])$ を割り切るときに限る．

証明. $\mathcal{O}_F$ において c が c' を割り切るならば $A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ において $\theta_\xi([c])$ は $\theta_\xi([c'])$ を割り切る．

$\mathcal{O}_F$ において c が c' を割り切らないとする．このとき $A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ において$\theta_\xi([c])$ が $\theta_\xi([c'])$ を割り切らないことを背理法により示す．$\theta_\xi([c']) = \theta_\xi([c])a$ なる $a \in A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$

が存在したとする．このとき c は c' を割り切らないので $v_F(c) > v_F(c')$．よって $c = mc'$ なる $m \in \mathfrak{m}_F$ が存在し

$$\theta_\xi([c']) = \theta_\xi([c])a = \theta_\xi([c'])\theta_\xi([m])a. \tag{2.3}$$

さらに c' は c で割り切れないので 0 ではない．よって補題 2.14 より $p^n = \theta_\xi([c'])b$ なる $n > 0$, $b \in A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ が存在する．このとき (2.3) より $p^n = p^n\theta_\xi([m])a$ であり，$A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ は p-ねじれ自由なので $\theta_\xi([m])a = 1$．しかし補題 2.14 から $\theta_\xi([m])$ の自然な写像 $A_{\mathrm{inf}}/(\xi) \to A_{\mathrm{inf}}/(\xi, p)$ による像はべき零なので，矛盾する．

□

命題 2.16. $\xi \in A_{\mathrm{inf}}$: 非退化な primitive 元．任意の $a \in A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ はある $c \in \mathcal{O}_F$ が存在して $\theta_\xi([c])$ の単元倍であり，c は単元倍を除いて一意.

証明. (一意性)
$a = \theta_\xi([c_1]) \cdot (\text{単元}) = \theta_\xi([c_2]) \cdot (\text{単元})$ $(c_1,\ c_2 \in \mathcal{O}_F)$ とする．このとき $\theta_\xi([c_1])$ と $\theta_\xi([c_2])$ はお互いを割り切る．よって命題 2.15 より c_1 と c_2 もお互いを割り切る．すなわち c_1 は c_2 は単元倍である．

(存在性)
$a = 0$ のときは明らかなので $a \neq 0$ とする．命題 2.14 より $n \geq 0$ と p で割り切れない $a' \in A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ が存在し，$a = p^n a'$ と書ける．$\xi = [\omega] - up$ $(\omega \in m_F,\ u \in A_{\mathrm{inf}}^\times)$ と書くと

$$a = p^n a' = (\theta_\xi(u^{-1})\theta_\xi(up))^n a' = \theta_\xi(u)^{-1}\theta_\xi([\omega])^n a'.$$

よって a を a' に置き換えることで a は p で割り切れないとしてよい．

自然な同型

$$A_{\mathrm{inf}}/(\xi, p) = A_{\mathrm{inf}}/([\omega], p) \simeq \mathcal{O}_F/(\omega)$$

があり，写像 θ_ξ は次の図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd} A_{\mathrm{inf}} \arrow[r, "\theta_\xi"] \arrow[d, two heads] & A_{\mathrm{inf}}/(\xi) \arrow[d, two heads] \\ \mathcal{O}_F \simeq A_{\mathrm{inf}}/(p) \arrow[r, two heads] & A_{\mathrm{inf}/(\xi,p)} \simeq \mathcal{O}_F/(\omega) \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

ここで下の写像以外は全て全射なので下の写像も全射となる．$c \in \mathcal{O}_F$ で下の写像による像が右の写像による a の像に一致するものとする．このとき a は p で割り切れないので c は ω で割り切れない．したがって $\omega = cm$ なる $m \in \mathfrak{m}_F$ が存在し

$$p = \theta_\xi(u^{-1})\theta_\xi(up) = \theta_\xi^{-1}\theta_\xi([\omega]) = \theta_\xi(u^{-1})\theta_\xi([c])\theta_\xi([m]).$$

いま図式 (2.4) より $a = \theta_\xi([c]) + pb$ なる $b \in A_{\rm inf}/(\xi)$ が存在し

$$a = \theta_\xi([c]) + pb = \theta_\xi([c]) + b\theta_\xi(u)^{-1}\theta_\xi([c])\theta_\xi([m]) = \theta_\xi([c])(1 + b\theta_\xi^{-1}\theta_\xi([m])).$$

さらに $b\theta_\xi(u)^{-1}\theta_\xi([m])$ は p で割り切れ

$$(1 + b\theta_\xi(u)^{-1}\theta_\xi([m]))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(b\theta_\xi(u)^{-1}\theta_\xi([m]))^n$$

は $A_{\rm inf}/(\xi)$ で収束する．よって $1 + b\theta_\xi(u)^{-1}\theta_\xi([m])$ は $A_{\rm inf}/(\xi)$ の単元なので示すべき主張が示た.

□

命題 2.17. $\xi \in A_{\rm inf}$: primitive，$C_\xi = {\rm Frac}\,(A_{\rm inf}/(\xi))$．このとき C_ξ は F の untilt で付値環は $\mathcal{O}_{C_\xi} = A_{\rm inf}/(\xi)$ であり連続同型 $\eta : F \simeq C_\xi^\flat$ は canonical な同型

$$\mathcal{O}_F/(\omega) \simeq A_{\rm inf}/([\omega], p) = A_{\rm inf}/(\xi, p) \simeq \mathcal{O}_{C_\xi}/(p) \tag{2.5}$$

により誘導される．ここで ω は自然な写像 $A_{\rm inf} \to A_{\rm inf}/(p) \simeq \mathcal{O}_F$ の下での ξ の像である．さらに $c \in \mathcal{O}_F$ は C_ξ に付随した $\sharp$ の下で $\theta_\xi([c])$ に写る.

証明. $\xi = [\omega] - up$ $(\omega \in \mathfrak{m}_F,\ u \in A_{\rm inf}^\times)$ と書く．また $\mathcal{O} := A_{\rm inf}/(\xi)$ とする．もし $\omega = 0$ な らば自然な同型

$$\mathcal{O} = A_{\rm inf}/(\xi) = A_{\rm inf}/(p) \simeq \mathcal{O}_F$$

があるので C_ξ は F の自明な untilt となる．よって $\omega \neq 0$ と する.

$\mathcal{O} = A_{\rm inf}/(\xi)$ は整域であることを示す．$ab = 0$ なる 0 でない元 $a,\, b \in \mathcal{O}$ が存在したとする．命題 2.16 より $a = \theta_\xi([c])u$ なる $0 \neq c \in \mathcal{O}_F, u \in \mathcal{O}^\times$ が存在する．さらに補題 2.14 より $\theta_\xi([c])w = p^n$ なる $n > 0$ と $w \in \mathcal{O}$ が存在する．したがって

$$0 = abw = \theta_\xi([c])wub = p^n ub$$

となるが，これは命題 2.12 に矛盾する.

命題 2.16 より $y \in \mathcal{O}\backslash\{0\}$ に対し $z \in \mathcal{O}_F$ が存在し，y は$\theta_\xi([z])$ の単元倍になる．このとき $v(y) := v_F(z)$ と定義する．v は構成から乗法的な準同型を定め，その像は v_F の像と一致する．さらに命題 2.15 より $v(y_1) \geq v(y_2)$ なる $y_1,\, y_2 \in \mathcal{O}\backslash\{0\}$ があれば y_1 は y_2 で割り切れるので

$$v(y_1 + y_2) = v((y_1/y_2 + 1)y_2) = v(y_1/y_2 + 1) + v(y_2) \geq v(y_2) = min(v(y_1), v(y_2)).$$

したがって v は $\mathcal{O}$ 上の離散的ではない付値となる.

v は C_ξ 上の付値に一意に延長でき，これも v で表すことにする．$x \in C_\xi$ を $x = y_1/y_2$ $(y_1,\ y_2 \in \mathcal{O})$ と書くと命題 2.15 より $v(x) = v(y_1) - v(y_2)$ が非負であるのは $\mathcal{O}$ で y_1 が y_2 で割り切れるときに限られる．よって $\mathcal{O}$ は C_ξ の付値環である.

$\mathcal{O}_F/(\omega)$ 上の p 乗写像は全射なので同型 (2.5) により $\mathcal{O}_{C_\xi}/(p)$ 上の p 乗写像も全射である．さらに等式

$$p = \theta_\xi(u^{-1})\theta_\xi(up) = \theta_\xi(u)^{-1}\theta_\xi([\omega])$$

より $v(p) = v_F(\omega) > 0$ である．よって C_ξ は剰余標数 p である．さらに命題 2.12 より C_ξ は付値 v に関し完備である．したがって C_ξ は perfectoid field である．

命題 2.9(及びその証明) により同型 (2.5) は一意に同型

$$\mathcal{O}_F \simeq \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_F/(\omega) \simeq \varprojlim_{x \mapsto x^p} A_{\inf}/(\xi, p) \simeq \varprojlim_{x \mapsto x^p} O_{C_\xi}/(p) \simeq \varprojlim_{x \mapsto x^p} O_{C_\xi} = O_{C_\xi^\flat}$$

に持ち上がる．よって連続同型 $F \simeq C_\xi^\flat$ に持ち上がる．さらにこの同型の下で $c \in \mathcal{O}_F$ は $(\theta_\xi([c^{1/p^n}])) \in \mathcal{O}_{C_\xi^\flat}$ に写る．よって C_ξ に付随したシャープ写像の下で $\theta_\xi([c])$ に写る． □

命題 2.18. $C : F$ の untilt.

(1) 全射な環準同型 $\theta_C : A_{\inf} \to \mathcal{O}_C$ が存在し，θ_C は次で与えられる．

$$\theta_C\left(\sum [c_n]p^n\right) = \sum c_n^\sharp p^n \quad (c_n \in \mathcal{O}_F)$$

(2) $\mathrm{Ker}(\theta_C)$ の primitive な元は $\mathrm{Ker}(\theta_C)$ を生成する．

証明. C は代数閉体なので $C = \mathbb{C}_p$ のときを考えれば十分である．このときは (1) はよく知られている (cf.[1]).
さらに $\mathrm{Ker}(\theta_C)$ は primitive な元 $\xi_C := [p^\flat] - p \in A_{\inf}$ で生成される．ここで $p^\flat \in \mathcal{O}_F$ は $(p^\flat)^\sharp = p$ なる元である．

いま C は一般の untilt とし $\xi \in \mathrm{Ker}(\theta_C)$ を primitive な元とする．写像 θ_C は全射 $\overline{\theta_\xi} : A_{\inf}/(\xi) \to \mathcal{O}_C$ を誘導する．このとき $\mathcal{O}_C$ は体ではないので $\mathrm{Ker}(\overline{\theta_\xi})$ は極大ではない素イデアルである．さらに $\mathrm{Ker}(\overline{\theta_\xi})$ は ξ_C の像で生成されるイデアルである．命題 2.17 より $A_{\inf}/(\xi)$ は付値環なので $\mathrm{Ker}(\overline{\theta_\xi}) = 0$ とならざるを得ない．よって ξ は $\mathrm{Ker}(\theta_C)$ を生成する． □

注意 2.19. 証明の最後で付値環の 0 ではない単項素イデアルは極大である，という初等的な事実を用いた．

定義 2.20. F の untilt C に対して命題 2.18 で構成した環準同型 θ_C を C の untilt 写像という．

定理 2.21 (kedlaya-Liu, Fontaine)**.** 対応 $C \mapsto \mathrm{Ker}(\theta_C)$ は全単射

$$\{F \text{ の untilts の同地類}\} \xrightarrow{\sim} \{A_{\inf}\text{の primitive な元で生成されるイデアル}\}$$

を与える．

証明. 対応が全射であることを示す．primitive 元 $\xi \in A_{\mathrm{inf}}$ を考える．命題 2.17 より F の untilt C_ξ が存在し $c \in \mathcal{O}_F$ に対して $c^\sharp = \theta_\xi([c])$．よって θ_C の記述から θ_ξ と θ_{C_ξ} は一致する．したがって $\xi A_{\mathrm{inf}} = \mathrm{Ker}(\theta_\xi) = \mathrm{Ker}(\theta_{C_\xi})$.

次に対応が単射であることを示す．C を F の untilt とし連続同型 $\eta : F \simeq C^\flat$ を備えたものとする．primitive 元 $\xi \in \mathrm{Ker}(\theta_C)$ で F の untilt C_ξ を与えるものとし，$\eta_\xi : F \simeq C_\xi^\flat$ を備えている連続同型とする．このとき C と C_ξ が同値であることを示せばよい．写像 θ_C は同型 $\mathcal{O}_{C_\xi} = A_{\mathrm{inf}}/(\xi) \simeq \mathcal{O}_C$ を誘導し，同型 $C_\xi \simeq C$ に延長される．$f : C_\xi^\flat \simeq C^\flat$ を誘導される同型とする．このとき命題 2.9 と命題 2.17 より写像 $f \circ \eta_\xi$ は同型

$$\mathcal{O}_F/(\omega) \simeq A_{\mathrm{inf}}/(p,\xi) = \mathcal{O}_{C_\xi}/(p) \simeq \mathcal{O}_C/(p) \tag{2.6}$$

を引き起こす．ここで ω は ξ の $A_{\mathrm{inf}}/(p) \simeq \mathcal{O}_F$ における像である．任意の $c \in \mathcal{O}_F$ に対し，この同型は c の $\mathcal{O}_F/(\omega)$ における像を $\theta_C([c]) = c^\sharp$ の $\mathcal{O}_C/(p)$ における像に送る．すなわち $c \in \mathcal{O}_F$ が ω で割り切れるのは $c^\sharp$が p で割り切れるときに限られる．特に $v_F(\omega) = v_C(p)$ である．このとき命題 2.9-(1) の証明より同型 (2.6) は η から誘導されるものである．よって命題 2.9-(2) より $f \circ \eta_\xi = \eta$ を得る．つまり C と C_ξ は同値.

□

参考文献

[1] O. Brinon and B. Conrad, *CMI Summer School notes on p-adic Hodge theory (preliminary version)*, 2009. course notes.
`http://math.bu.edu/people/jsweinst/AWS/Files/BrinonConradPAdicHodgeTheory.pdf`

[2] Serin Hong, *Notes on p-adic Hodge theory.*
`http://www-personal.umich.edu/~serinh/Notes%20on%20p-adic%20Hodge%20theory.pdf`

[3] The Stacks project authors, *The Stacks project.*
`https://stacks.math.columbia.edu/`